**TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO**

**en San Luis Potosí**

**Ingeniería en Sistemas Computacionales**

Nombre de la Materia

Algebra lineal

No. y Nombre de la Actividad

Investigación de transformaciones lineales

Nombre del alumno:

Carlos Antonio Bravo Hernández

Asesor: Ángel Ubaldo Martínez Ramírez

San Luis Potosí, San Luis Potosí al 05/12/2024

**Introducción a las transformaciones lineales**

Las transformaciones lineales intervienen en muchas situaciones en Matemáticas y son algunas de las funciones más importantes. En Geometría modelan las simetrías de un objeto, en Algebra se pueden usar para representar ecuaciones, en Análisis sirven para aproximar localmente funciones, por ejemplo

Sean , espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo

Una función de  en transforma vectores de en vectores de .

Impondremos condiciones para que preserve las operaciones de suma de vectores y multiplicación por escalar, esto es, que sea equivalente sumar y multiplicar por escalar las preimágenes en como las imágenes en .

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Definición:

Sean , espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo

es una transformación lineal de en si:

1. Aditividad: ,
2. Homogeneidad: , ,

Es usual denotar con los mismos símbolos \* y \* (Símbolo que se omite) la suma y el producto por escalar definidos sobre los espacios vectoriales y como se hizo en la definición, que pueden ser diferentes.

también se llama aplicación lineal.

Las transformaciones lineales tienen aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la vida cotidiana, como:

* Matemáticas

En geometría, modelan las simetrías de un objeto. En álgebra, se pueden usar para representar ecuaciones. En análisis, sirven para aproximar localmente funciones.

* Ciencias de la computación

Son esenciales en el procesamiento de imágenes y gráficos por ordenador. Se pueden usar para transformar imágenes, rotar objetos en tres dimensiones y simular efectos de iluminación.

* Física

En la mecánica cuántica, se utilizan para describir las observables físicas, como el momento y la posición. Las transformaciones unitarias son un subconjunto especial de aplicaciones lineales que juegan un papel clave en la descripción de la evolución temporal de los sistemas cuánticos.

Una aplicación lineal es una aplicación entre dos espacios vectoriales que preserva las operaciones de adición de vectores y multiplicación por un escalar.

**Espacios y subespacios vectoriales**

Un espacio vectorial es un conjunto donde hay definida una operación suma (la suma de dos elementos del conjunto es otro elemento del conjunto) y una operación producto por escalares (el producto de un escalar, real o complejo, por un elemento del conjunto es otro elemento del conjunto) con las propiedades que conocemos de la suma y producto por escalares para vectores de coordenadas (conmutatividad, asociatividad, existencia de elemento nulo, elemento opuesto, distributivas, etc.). Se dice que el espacio vectorial es real o es complejo en función de que se consideren escalares reales o complejos respectivamente. Además de los espacios de coordenadas y , que manipulamos habitualmente, algunos ejemplos típicos de espacios vectoriales son, con las operaciones usuales de suma de matrices y funciones y de producto de una matriz o una función por un escalar:

* El conjunto de todas las matrices de dimensiones determinadas, .
* El conjunto de todos los polinomios en una variable.
* El conjunto de todos los polinomios en una variable de grado menor o igual que un cierto .
* El conjunto de todas las funciones continuas (en un punto, en un intervalo).
* El conjunto de todas las funciones derivables (en un punto, en un intervalo).
* El conjunto de todas las funciones integrables en un intervalo.
* El conjunto de las funciones (continuas, derivables, integrables) que se anulan en un punto prefijado.
* El conjunto de las funciones integrables en un intervalo y cuya integral en dicho intervalo es cero
* El conjunto de las funciones derivables que verifican que para todo (en un intervalo, en toda la recta real).
* El conjunto de las funciones derivables que verifican que para todo (en un intervalo, en toda la recta real) y se anulan en un punto prefijado.

Y algunos ejemplos típicos de conjuntos que, con las operaciones usuales, no son espacios vectoriales:

* El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden que tienen inversa.
* El conjunto de los polinomios de un grado prefijado .
* El conjunto de las funciones continuas (en un punto, en un intervalo) tales que siendo un punto del intervalo dado.
* El conjunto de los vectores de cuya segunda coordenada es igual a uno.
* El conjunto de los vectores de cuyas coordenadas verifican una ecuación de segundo grado.
* El conjunto de todas las funciones derivables que verifican que para todo (en un intervalo, en toda la recta real).

El tipo de subconjuntos mas importantes dentro de un espacio vectorial son los llamados subespacios vectoriales. En ellos se puede realizar las operaciones del espacio vectorial sin salirnos de dicho subconjunto.

Se dice que un subconjunto (no vacío) de un espacio vectorial es un subespacio vectorial si, con las operaciones que hay definidas en el espacio vectorial, es un espacio vectorial. Es decir, si verifica que:

1. ⇒
2. ⇒

De forma equivalente, es un subespacio vectorial si

y ⇒

Notemos que si es un subespacio vectorial, el vector nulo tiene que pertenecer a .

La propiedad (a) nos dice que si tenemos un vector no-nulo de un subespacio vectorial, la recta determinada por dicho vector está contenida en el subespacio. La propiedad (b) nos dice que si tenemos dos vectores (que no sean uno múltiplo del otro) de un subespacio vectorial, el plano determinado por dichos vectores está contenido en el subespacio.

Obviamente y son subespacios vectoriales (a veces llamados subespacios triviales). En el espacio tridimensional, cualquier recta o plano que pase por el origen es un subespacio vectorial. En el plano, los vectores de posición determinados por los puntos de una parábola no forman un subespacio vectorial.

**Representación matricial de una transformación lineal**

Sean y dos espacios vectoriales de dimensión y , respectivamente, y sea una transformación lineal, entonces existe una matriz A de orden llamada matriz de transformación o representación matricial de que satisface para toda en .

Ejemplo de representación matricial de una transformación en

Si se tiene una transformación dada por

La representa la transformación, que será representada por mientras que la matriz a su lado representa el vector original. El resultado es la transformación realizada. Para poder representarla de forma matricial lo que se debe obtener es la matriz de transformación. Ya que a la vez se obtiene, se pueden determinar otros datos como el núcleo y la imagen de la transformación.

Para este caso utilizando el resultado de la transformación, se puede determinar fácilmente la matriz de transformación, separando el vector original y determinando las operaciones que se realizaron.

De manera que

Y su representación quedaría como la matriz de trasformación multiplicando al vector original para dar como resultado a la transformación:

**Operaciones con transformaciones lineales**

Definir la suma, el producto por escalar y el producto de transformaciones lineales y conocer sus propiedades elementales.

1. Definición (Suma de transformaciones lineales)

Sean , . La aplicación se define mediante la formula

.

1. Proposición (la suma de dos transformaciones lineales es lineal).

Sean , (, *).* Entonces

Probemos que es aditiva. Sean entonces

(i) (ii) (iii) (iv) .

En (i) y (iv) usamos la definición de , en (ii) la Aditividad de y , en (iii) las propiedades asociativa y conmutativa de la adición en el espacio vectorial .

Ahora probemos que es homogénea. Sean , . Entonces

En (i) y (iv) aplicamos la definición de , en (ii) la propiedad homogénea de y , en (iii) una de las dos leyes distributivas en el espacio vectorial

1. Definición (Producto de una transformación lineal por un escalar).

Sean y . La aplicación se define mediante la fórmula

1. Definición (producto de transformaciones lineales).

Sean y . La aplicación se define mediante la fórmula

.

En otras palabras,

**Núcleo e imagen de las transformaciones lineales**

Núcleo de una transformación

Sea una transformación lineal. Llamamos núcleo de al conjunto de vectores del dominio cuya imagen por es el .

El núcleo de una transformación lineal es un subespacio de .

Imagen de una transformación lineal

Llamamos imagen de al conjunto de vectores de W que son imagen de algún vector de

La imagen es un subespacio de

Ejemplo

Dada la siguiente transformación lineal

Buscar el núcleo, la imagen y determinar sus dimensiones.

Resolución

Para determinar el núcleo planteamos:

está en el núcleo = (0,0,0)

Esto implica que la primera componente debe ser el doble de la segunda y que la tercera componente no tiene restricciones. Es un error común, en este punto, suponer que como “no aparece z”, entonces z = 0. Pero es importante notar que si “no aparece z” esto significa que no existen restricciones sobre esa componente. La forma de un vector del núcleo sería:

Aplicando propiedades lo podemos escribir:

Luego el núcleo es:

Y una base del núcleo es:

La imagen la podemos obtener aplicando propiedades sobre la expresión que define la transformación lineal:

Los vectores (1, 0, 2) y (-2, 0, -4) son linealmente dependientes. Entonces tomamos uno de ellos para la base de la imagen:

Finalmente podemos responder sobre las dimensiones del núcleo e imagen, porque hemos obtenido bases de estos subespacios:

**Teorema de las dimensiones**

El teorema de las dimensiones establece una relación aritmética sencilla entre la dimensión de y la dimensión del núcleo y de la imagen. Sea transformación lineal. Si (finita) entonces:

Ejemplo

Buscar el núcleo y la imagen de la siguiente transformación lineal:

Resolución

Buscar el núcleo de la transformación lineal es buscar los vectores del dominio cuya imagen es el vector nulo del condominio:

Luego los vectores del núcleo son de la forma:

Así podemos escribir:

El núcleo es una recta porque tiene dimensión 1.

¿Cuál es la dimensión de la imagen? Por el teorema de las dimensiones debe ser:

La imagen es todo el espacio porque el único subespacio de dimensión 2 que está en es .

¿Cómo se llaman las funciones cuya imagen coincide con el codominio? Sobreyectivas

Diremos entonces que es una transformación lineal sobreyectiva

Autovalores y autovectores

Los autovalores y autovectores, también conocidos como valores y vectores propios, son conceptos matemáticos que se relacionan con las transformaciones lineales:

Autovectores

Son vectores que no cambian de dirección al aplicarse una transformación lineal, como una rotación o una reflexión. Solo cambian su módulo por un valor escalar (λ).

Autovalores

Son los valores que se obtienen al resolver la ecuación característica para λ.

se pueden utilizar para reducir el ruido en los datos, mejorar la eficiencia en tareas que requieren muchos recursos computacionales, y eliminar características que están fuertemente correlacionadas.

Consideremos la matriz:

Queremos ver cuál es el efecto que provoca esa matriz por los vectores de . ¿Qué pasa cuando uno multiplica esa matriz A por un vector?

Pensemos para que sea sencillo que tomamos el cuadrado con vértice en el origen de lado 1 y que está en el primer cuadrante:

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Digamos que llamamos a esta zona el recinto R. ¿En qué se transformaría este recinto bajo el efecto de esa matriz? Para responder esta pregunta podemos ver en que se transforman sus vértices. Sabemos que el vector nulo se va a transformar en el vector nulo. Los demás serán:

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Uno se podría hacer esta pregunta: ¿Habrá vectores que después de la deformación conservan la dirección?

* El vector (1,0) se transformó en el (3,1). No conserva la dirección.
* El (0,1) se transforma en el (2,4). No conserva la dirección.
* El (1,1) se transformó el (5,5). Entonces se produjo una dilatación de factor 5, y se conservó la dirección.

Ese vector que mantuvo su dirección se denomina autovector, y el factor por el cual se dilató es el autovalor correspondiente

**Aplicaciones avanzadas de las transformaciones lineales**

El álgebra, con su estudio de aplicaciones lineales, proporciona un marco teórico robusto para la matemática pura y se extiende a aplicaciones avanzadas en múltiples campos. Este apartado explora cómo las transformaciones lineales son fundamentales en áreas como la diagonalización, así como en aplicaciones prácticas dentro de la ciencia de la computación y la física, demostrando la versatilidad y potencia de estas herramientas matemáticas.

1. Diagonalización y valores propios

La diagonalización es un proceso que consiste en encontrar una base de un espacio vectorial tal que la matriz que representa una transformación lineal en esta base es una matriz diagonal. Este proceso está intrínsecamente relacionado con los conceptos de valores y vectores propios, elementos que revelan la estructura interna de las transformaciones lineales.

Un valor propio de una transformación lineal es un escalar λ tal que, para algún vector no nulo v, la transformación de v es simplemente λ veces v. Estos conceptos son centrales en el estudio del álgebra lineal y tienen aplicaciones prácticas significativas, como en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, la optimización y en el análisis de estabilidad de sistemas.

Por ejemplo, en el análisis de redes complejas o en la optimización de algoritmos, la capacidad de diagonalizar una matriz puede simplificar enormemente el problema, permitiendo soluciones más directas y eficientes. Los valores propios, por otro lado, juegan un papel vital en el análisis de la estabilidad de sistemas físicos y en la predicción de comportamientos a largo plazo en sistemas dinámicos.

1. Aplicaciones en ciencias de la computación y física

En ciencias de la computación, las aplicaciones lineales son esenciales en el procesamiento de imágenes y gráficos por ordenador. La transformación de imágenes, la rotación de objetos en tres dimensiones y la simulación de efectos de iluminación se pueden modelar eficazmente mediante transformaciones lineales. Estas operaciones se basan en la manipulación de vectores y matrices para modificar las propiedades visuales de los objetos, optimizando tanto la calidad visual como el rendimiento computacional.

En el campo de la física, especialmente en la mecánica cuántica, las aplicaciones lineales se encuentran en el corazón de la formulación matemática de la teoría. Los operadores lineales se utilizan para describir las observables físicas, como el momento y la posición. Y las transformaciones unitarias, un subconjunto especial de aplicaciones lineales, juegan un papel clave en la descripción de la evolución temporal de los sistemas cuánticos. La diagonalización de operadores lineales, en este contexto, permite encontrar estados propios de energía y predecir el comportamiento de partículas subatómicas.

1. Casos de estudio y ejemplos prácticos

La diagonalización y el cálculo de valores propios son fundamentales en el diseño y análisis de algoritmos numéricos, permitiendo soluciones eficientes para problemas de gran escala. Un ejemplo notable es el algoritmo de Google PageRank, que utiliza valores propios para determinar la importancia relativa de las páginas web en los resultados de búsqueda.

En física, el estudio de los modos normales de vibración de una estructura mecánica puede modelarse mediante la búsqueda de valores y vectores propios, proporcionando una comprensión profunda de las resonancias y las frecuencias naturales del sistema.

**Conclusión**

Las transformaciones lineales son un concepto fundamental en álgebra lineal, pues permiten describir y analizar cómo los vectores de un espacio se transforman al pasar a otro espacio mientras se preservan propiedades esenciales como la aditividad y la homogeneidad. Su representación mediante matrices proporciona una herramienta poderosa para resolver problemas en múltiples disciplinas, como la geometría, la física y la computación gráfica. Además, conceptos como el núcleo, la imagen, los autovalores y los autovectores ofrecen una comprensión más profunda de las propiedades y comportamientos de estas transformaciones, facilitando su aplicación en sistemas dinámicos, modelado de datos y análisis dimensional. En resumen, las transformaciones lineales no solo son una pieza clave en la teoría matemática, sino también una base esencial para numerosas aplicaciones prácticas que van desde la resolución de ecuaciones hasta el desarrollo de tecnologías avanzadas.

**Bibliografía**

<https://neblan.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/10/tema-4.pdf>

<https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/08/21c.-TRANSFORMACIONES-LINEALES-3.pdf>

<https://aga.frba.utn.edu.ar/nucleo-e-imagen-clasificacion-de-las-transformaciones-lineales/>

<https://lineal2cx07.wordpress.com/2016/04/08/representacion-matricial-de-una-transformacion-lineal/>

<https://aga.frba.utn.edu.ar/autovalores-autovectores-definiciones-propiedades/>

<https://cursos.frogamesformacion.com/pages/blog/aplicaciones-lineales-algebra>